Yves Serra, juin 2022

La tablette YBC7289 (Yale Babylonian Collection) est une des plus célèbres tablettes babyloniennes. Elle est référencée sur le site de Yale :
https://collections.peabody.yale.edu/search/Record/YPM-BC-021354

Cette tablette comporte une estimation remarquablement précise de $\sqrt{2}$ en notation babylonienne, 1 24 51 10, soit (numération mixte de bases 10 et 60, voir infra) :
$1 + 24/60 + 51/60^2 + 10/60^3$
La valeur babylonienne est donc : 1,41421296...
La valeur aujourd'hui connue étant 1,41421356...

Comment peut-on expliquer une telle précision à 6 chiffres significatifs en sachant que les babyloniens ne divisaient pas directement mais multipliaient par les inverses, dont ils avaient des tables (dans leur système en base mixte 10 60) ?

L'hypothèse la plus répandue est qu'ils auraient utilisé la méthode de calcul itératif du héron, nommée ainsi en référence à Héron d'Alexandrie (1er siècle après J.-C., mais on sait qu'elle était connue bien avant chez les égyptiens), mais est-ce compatible avec le mode de numération qu'ils utilisaient pour les calculs ?

https://fr.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9thode_de_H%C3%A9ron

Je reprends d'abord les principes de numération et de calcul jusqu'à la division par multiplication par les inverses, qu'on peut considérer être à la base de cette interrogation.

Je présente ensuite très rapidement la méthode de Héron par approximation successives, et ensuite j'essaie de l'appliquer par un calcul utilisant la division mésopotamienne.

Je conclus par un doute sur l'utilisation de la méthode de Héron, en prolongement de l'article (qui sera indiqué F&R dans le texte) :

HISTORIA MATHEMATICA 25 (1998), 366–378, ARTICLE NO. HM982209
Square Root Approximations in Old Babylonian Mathematics: YBC 7289 in Context
David Fowler and Eleanor Robson

Une méthode d'approximation plus simple, type dichotomie, est ensuite testée avec la numération babylonienne et sans la difficulté de la division. Le test permet de conclure à la possibilité d'une telle démarche pour les scribes, mais en l'absence de sources, le doute demeure.

1) Le mode de numération et de calcul

La numération babylonienne est mixte au sens où les nombres de 1 à 59 sont exprimés (additivement) avec 2 symboles et par unités (le clou) et dizaines (le chevron). Puis les nombres plus grands sont exprimés par une suite de nombres de 1 à 59 chacun à appliquer aux puissances croissantes de 60.
Pour jouer avec cette numération, voir le calculateur de Baptiste Mélès sur http://baptiste.meles.free.fr/site/mesocalc.html

Quelques exemples transcrits en notation moderne :

Base 10	Base 60 Babylone
1	1
20	20
60	1
80	1 20
145	2 25
3 500	58 20
3 600	1
10 000	2 46 40

On note tout de suite plusieurs difficultés. Comme il n'y a pas de zéro, on ne peut distinguer 1 de 60 de 3600 (…), seul le contexte précise la valeur. De même on aura vite des risques d'erreur entre (3600 + 1) noté (1   1) et (3600 + 60) noté (1 1). Nous ne considérerons pas ces points plus avant, et supposerons que les scribes savaient contourner ces difficultés.

Pour les nombres plus petits que 1, le principe est le même avec les inverses des puissances de 60 :

Base 10	Base 60 Babylone	
1	1	
0,5	30	car 1/2 = 30/60
0,15	9	car 15/100 = 9/60
1,414	1 24 50 60	car 1,414 = 1414/1000 = 1 + 414/1000 = 1 + 89424/60^3 = 1 + 24 / 60 + 50 / 60^2 + 24 / 60^3

Avec un tel système il est possible d'additionner, soustraire et multiplier sans trop de difficulté de principe, même si les calculs avec les notations cunéiformes devaient être extrêmement fastidieux, bien qu'appuyés sur des tables dont de nombreuses ont été retrouvées.

A titre d’exemple, le scribe peut vérifier que
(1 24 51 10) x (1 24 51 10) = 1 59 59 59 38 1 40

Son estimation de $\sqrt{2}$ est donc excellente, la meilleure possible avec 4 nombre significatifs (en base 60) , et légèrement par défaut.

Notons par ailleurs une remarque intéressante (F&R et https://fr-academic.com/dic.nsf/frwiki/1746455). Le 30 qui figure sur le côté du carré est équivalent à 1/2 et on a donc à la fois sur la tablette 1/2 , $\sqrt{2}$, et 1/ $\sqrt{2}$, ce qui fait de cette tablette un exercice très riche pour le scribe babylonien.
$\sqrt{2}$ est approché par 1 24 51 10, 1/ $\sqrt{2}$ est approché par 42 25 35 et si on multiplie ces deux approximations on trouve 59 59 59 49 très proche de 1.

Pour diviser, les babyloniens utilisaient des tables d’inverses puis la multiplication. Les valeurs des inverses n’étaient données que si elles comportaient un nombre fini (et souvent faible) de puissances de 60. Il est facile de démontrer qu’un inverse ne répond à cela que si le nombre à inverser a les mêmes diviseurs que la base, soit ici 2, 3 et 5, les autres nombres étaient affectés de la mention « l’inverse n’existe pas » et étaient dits « non réguliers ». Voici les exemples avec les 10 premiers nombres :

Nbre	Inverse babylonien	
1	1	
2	30	30/60
3	20	20/60
4	15	15/60
5	12	12/60
6	10	10/60
7	N’existe pas	
8	7 30	$7/60 + 30/60^2$
9	6 40	$6/60 + 40/60^2$
10	6	6/60

On voit bien ici la pertinence de la base 60, sur les dix premiers nombres un seul, 7, n’a pas d’inverse au sens babylonien. Cette pertinence est souvent mobilisée pour expliquer la conservation moderne de cette base pour le temps et pour les angles (heures, minutes, secondes).

Il semble raisonnable d’imaginer qu’au quotidien les scribes pouvaient se contenter de ce système simplifié qui revient à créer un sous ensemble des nombres rationnels : ceux dont les dénominateurs conviennent à la base 60, les valeurs régulières. Rappelons aux puristes qui seraient choqués par cette approche que nous faisons la même chose quand nous limitons la notation décimale à un nombre fini de décimales, également pour des raisons pratiques, dans les ordinateurs.

En revanche, pour des calculs plus exigeants, et le calcul de $\sqrt{2}$ en est un exemple, les babyloniens devaient adopter une méthode plus ambitieuse, mais laquelle ? Pour F&R , la tablette YBC 7289 s’inscrit justement dans un processus d’apprentissage et de résolution de problèmes géométriques complexes qui supposaient d’utiliser de telles valeurs précises.

2) La méthode de Héron d'Alexandrie

On cherche à calculer une racine, par exemple $\sqrt{2}$, c'est à dire le côté du carré d'aire 2. On part d'un rectangle d'aire 2, dont un côté vaut 1 et l'autre 2, et on va progressivement déformer ce rectangle pour se rapprocher du carré.

Soit x_n le petit côté du rectangle à l'étape n ($x_1 = 1$), le grand côté est $y_n = 2 / x_n$ ($y_1 = 2$).
A chaque itération, on prend pour côté suivant la moyenne du grand et du petit côté :

$x_{n+1} = (x_n + 2/x_n) / 2$

Et x_n s'approche de $\sqrt{2}$ quand n croît. Observons d'abord avec nos outils de calcul actuels combien il faut d'itérations pour obtenir 6 chiffres significatifs exacts :

Itération	x_n
1	1
2	1,5
3	1,416667
4	1,414216
5	1,41421356

Il suffit donc de 4 itérations pour atteindre 6 chiffres significatifs, ce qui tend à conforter l'hypothèse de la possibilité d'une utilisation manuelle de cette méthode efficace.

Notons que la méthode itérative suggérée dans F&R est en pratique équivalente à la méthode du héron. Sa formulation plus géométrique leur semble plus proche des types de raisonnement faits par les scribes, mais en l'absence de source, il est équivalent de raisonner avec la méthode du héron.

3) Tentatives avec le calcul babylonien

Compte-tenu des types de problèmes résolus sur les tablettes, l'équivalent babylonien de la formule $x_{n+1} = (x_n + 2/x_n) / 2$ ne semble pas devoir poser de difficulté particulière aux scribes sous la forme d'un enchaînement de calculs :
- prendre x
- inverser x
- multiplier cet inverse par 2
- ajouter x
- multiplier par l'inverse de 2
- et on a ainsi le nouvel x, et recommencer

Tentons de reproduire les 4 itérations.

Itération	x_n	Inverse de x_n	calcul	
1	1	1	(1+2) x 30	3/2
2	1 30	40	(1 30 + 1 20) x 30	85/60 = 17 / 12
3	1 25	N'existe pas		

Dès la 3ème itération, on est bloqué car 1 25 n'est pas dans les tables d'inverses (ce qui s'explique puisque 17 est premier et ne divise pas 60). 17/12 n'est pas une valeur régulière dont l'inverse puisse s'écrire dans la notation babylonienne.

L'article F&R indique qu'on a alors 2 solutions, soit on cherche une approximation de l'inverse de 17/12, soit on cherche un nombre régulier proche de 17/12.

Le calculateur du site de Baptiste Mélès confirme bien que 1 25 n'est pas régulier. Il propose en plus les chiffres réguliers proches : 1.24.56.4.45.41.45.36 dont l'inverse est : 42.23.7.53.26.15

De telles tables à 8 chiffres n'étaient pas disponibles à la date de réalisation de la tablette (d'après F&R des tables à 6 chiffres plus tardives sont connues). Il est donc certainement optimiste de penser que le scribe disposait de ces informations, mais poursuivons les itérations en supposant qu'il ait eu cette approximation à disposition.

Itération	x_n	Inverse de x_n	calcul	
1	1	1	(1+2) x 30	3/2 = 1,5
2	1 30	40	(1 30 + 1 20) x 30	85/60 = 17 / 12 = 1,4166666
3	1 25		(1 25 + 2(42.23.7.53.26.15)) x30	
4	1.24.54.7.53			
5				

Il est possible, mais cela paraît de plus en plus difficile, de poursuivre ainsi. Le nombre 1.24.54.7.53 n'étant lui même pas régulier, il faudrait à nouveau trouver un nombre régulier proche pour continuer les itérations. Or, la distance entre le nombre régulier « proche » et le nombre cible peut être assez grande et le processus du héron aura du mal à converger pour atteindre la précision recherchée. Le scribe ayant calculé la valeur 1 24 51 10, qui est excellente, n'a donc probablement pas utilisé seule la méthode du héron. S'il l'a utilisée, ce dont il faudrait trouver des indices, il l'aura complétée ensuite par une démarche par approximations en contournant l'obligation de n'utiliser que les valeurs régulières.

Néanmoins, un indice allant dans le sens de l'utilisation de cette méthode du héron pourrait être que la valeur 1 25 (soit 17/12) apparaît dans plusieurs tablettes, alors que la valeur 1 24 51 10 n'a été rapportée que dans 2 tablettes (YBC 7289 et dans la liste de coefficients YBC 7243). Par ailleurs, il y a au dos de cette tablette YBC 7289 un rectangle qui peut faire penser à la première étape de la méthode du héron, mais sans évidence.

Allons plus loin, le scribe avait-il vraiment besoin de la méthode de héron ? Peut-être pas. Les scribes excellaient à transformer des échelles pratiques pour le mesurage, écrites avec des numérations spécifiques à chaque domaine d'utilisation, dans leur notation sexagésimale qui leur servait à faire les calculs. On peut donc imaginer le raisonnement suivant. Je fais un carré dont le côté vaut 1, je mesure la diagonale (les babyloniens connaissaient le théorème de Pythagore), cela me donne un premier encadrement x_{min} x_{max} dont j'élève le milieu au carré, et je poursuis par dichotomie. Expérimentalement, avec un décimètre grossier sur un carré de 10 cm, il est facile de voir que x_1 serait de l'ordre de 1,41, et le point de départ de la dichotomie pourrait être choisi entre 1,41 et 1,42 .

Autre possibilité, les scribes disposaient de nombreuses tables de référence et, en particulier , de tables de carrés. Il est naturellement possible à partir de ces tables de choisir un encadrement.

Quoi qu'il en soit, tentons le travail du scribe sur la base de départ 1,41 1,42. D'abord il traduit l'encadrement mesuré en sexagésimal : 1.24.36 et 1.25.12, puis il enchaîne les calculs :

min	max	moyenne	moyenne^2
1.24.36	1.25.12	1.24.54	2.0.8
	1.24.54	1.24.45	1.59.42
1.24.45		1.24.49.30	1.59.55
1.24.49.30		1.24.51.45	2.0.1
	1.24.51.45	1.24.50.37.30	1.59.58
1.24.50.37.30		1.24.51.11.15	2.0.0.3
	1.24.51.11.15	1.24.50.54.22.30	1.59.59.15
1.24.50.54.22.30		1.24.51.2.48.45	1.59.59.39.18.

...

Rappelons la valeur donnée par le scribe : 1 24 51 10 qui conduit à un carré de 1.59.59.59.38. On peut supposer qu'il recherchait les 4 premiers chiffres significatifs d'un nombre dont le carré serait 2, également avec 4 chiffres significatifs près, et donc il n'est pas allé chercher le cinquième terme dans les approximations successives, ce qui lui économise du calcul :

min	max	moyenne	moyenne^2
1.24.36	1.25.12	1.24.54	2.0.8
	1.24.54	1.24.45	1.59.42
1.24.45		1.24.49.30	1.59.55
1.24.49.30		1.24.51.45	2.0.1
	1.24.51.45	1.24.50.37.30	1.59.58
1.24.50.38		1.24.51.11	2.0.0.2
	1.24.51.11	1.24.50.54	1.59.59.14
1.24.50.54		1.24.51.4	1.59.59.42
1.24.51.4		1.24.51.8	1.59.59.53
1.24.51.8		1.24.51.10	1.59.59.59

Ce calcul pourrait encore être accéléré en appréciant les écarts mais, même ainsi, il est assez rapide pour être mené manuellement et ne butte pas sur les difficultés de la méthode du héron. Il ne sollicite que des additions, multiplications et divisions par 2 (soit la multiplication par 30).

4) Remarques conclusives

La tablette YBC 7289 comporte une valeur de $\sqrt{2}$ d'une précision étonnante. Il a été proposé que cette valeur aurait pu être calculée avec la méthode dite de Héron d'Alexandrie. Les limitations des calculs des divisions par les tables d'inverses montre que cette hypothèse ne permet pas d'expliquer la précision obtenue car elle butte rapidement sur des nombres non réguliers que le scribe ne savait pas inverser. Une solution par approximations successives plus simple (dichotomie par exemple) aurait pu être utilisée soit en prolongement de la méthode du héron soit directement à partir d'un encadrement grossier résultant d'une mesure ou d'une lecture sur une table des carrés.

Retrouver des traces archéologiques permettant de trancher sur la façon qu'ont eu les scribes de contourner ces difficultés pour atteindre la précision qu'ils ont obtenue est évidemment extrêmement improbable. On peut néanmoins, par une expérimentation comme celle reproduite ici, montrer qu'il était vraisemblablement à la portée des scribes de procéder par itérations dichotomiques simples. Resterait à confirmer si ce type de raisonnement peut être retrouvé dans les mathématiques mésopotamiennes. Comme le soulignent F&R, nous ne pourrions vraiment trancher que si nous avions des informations sur les méthodes employées par les scribes, mais malheureusement les tablettes ne comportent souvent que le résultat final de leur travail.

Ressources :

Maths American Association :
https://www.maa.org/press/periodicals/convergence/the-best-known-old-babylonian-tablet

Voir une présentation dans BibNum :
http://www.bibnum.education.fr/mathematiques/algebre/tablette-ybc-7289

sur le site du Louvre :
http://mini-site.louvre.fr/babylone/COMMUN/pdf/l_p2.pdf

et sur wikipedia :
https://fr.wikipedia.org/wiki/Math%C3%A9matiques_m%C3%A9sopotamiennes

Voir plus largement le contexte des mathématiques mésopotamiennes avec Christine Proust :
https://images.math.cnrs.fr/Mathematiques-en-Mesopotamie

Les ouvrages d'Eleanor Robson :
https://fr.wikipedia.org/wiki/Eleanor_Robson

et ceux de Christine Proust :
https://fr.wikipedia.org/wiki/Christine_Proust
https://www.youtube.com/watch?v=YjtjaTQmjOM
https://vimeo.com/119967608